الخميس 2015/11/11 — الخاصة

1) f ذ.ت.م على $[a,b]$ $\iff$ $f = g - h$

كتبت f على شكل فرق دالتين متزايدتين أو متناقصتين و محدودتان على $[a,b]$.

2) نتيجة:

f ذ.ت.م على $[a,b]$ $f \in C_{[a,b]}$ $\iff$ $f = g(x) - h(x)$

(مستمرة على $[a,b]$)

حيث h, g دالتان متزايدتان (متناقصتان) ومستمرتان على $[a,b]$.

مثال:

$$f = \underbrace{(x^2+1) - [x]}_{\text{دالتان متزايدتان}}$$

$\Leftarrow$ f ذ.ت.م على $[0,3]$.

Scanned by CamScanner

(3) - تأخذ التغير الكلي للمجموعة السابقة.

$$\overset{x}{\underset{0}{V}}(g) = \sup\{ x^2 \; ; \; P \in \mathbb{P}_{[0,x]} \}$$

$$= x^2 .$$

هو دالة.

وعليه تكون دالة التغير هي

$$V_g(x) = \overset{x}{\underset{0}{V}}(g)$$

$$= \begin{cases} x^2 & ; \quad 0 < x \leq 3 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

وذلك لكل قيم $x \ni [0,3]$ مع ملاحظة أن $V_g(0) = 0$

عندئذٍ يكون التغير الكلي لدالة التغير $[0,3]$

للدالة g هي:

$$\overset{3}{\underset{0}{V}}(V_g) = 3^2 - 0^2 = 9$$

لأنها متزايدة

وحسب المبرهنة: $= \overset{3}{\underset{0}{V}}(g)$

وهذا يوافق الملاحظة السابقة.

وظيفة:

أوجد دالة التغير للدوال:

$$h(x) = \sqrt[3]{x} \; ; \quad 1 \leq x \leq 5$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ 5 & ; \quad x = 1 \\ x+3 & ; \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

(4م) يلزم ويكفي:

تكون الدالة f حيث $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ذ.ت.م عليها اذا وفقط اذا وجدت دالة F متزايدة ومحدودة على نفس الفترة وتحقق المتراجحة:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \underbrace{F(x_2) - F(x_1)}_{\text{محدود}}$$

$$a \leq x_1 < x_2 \leq b$$

مطلوب من الكتاب.

(5م) كتابة الدالة على شكل

$(P_3$ ذ.ت.م على $[a,b]$ لأنه متزايدة على $[a,b]$ حسب (P_2).

ملاحظة:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(V_f) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

دالة الفرق:

$$V_f(x) - f(x)$$

دالة متزايدة على $[a,b]$.

$(P_4$ يلزم ويكفي لتكون دالة التغير مستمرة في نقطة x_0 من $[a,b]$ هو أن تكون الدالة f مستمرة في نقطة $x = x_0$ نفسها.

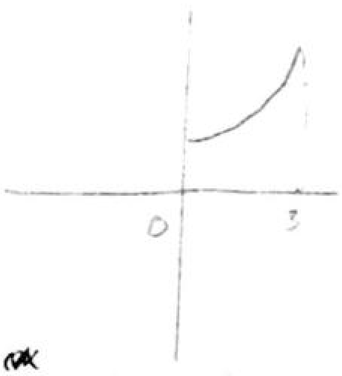
مثال: Exam:

أوجد دالة التغير للدالة $g(x) = x^2+1$ على الفترة $[0,3]$.
ثم أوجد تغيرها الكلي على هذه الفترة.

<u>الحل:</u>

من أجل ذلك نتبع الخوارزمية:

1) نكشف أن الدالة g ذ.ت.م على $[0,3]$.
نعلم أن g دالة متزايدة تماماً على $[0,3]$ وبالتالي فهي متزايدة تماماً على الفترة المغلقة $[0,x]$ لكل $0 < x \leq 3$ ولذا حسب ما سبق تكون g ذ.ت.م على $[0,x]$.
عندها نجد من أجل أية تجزئة P للفترة $[0,x]$ يكون لدينا (لأن g متزايدة تماماً):



$$v(g;P) = \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

$$= g(x) - g(0) = g(x) - 1$$

$$= x^2 + 1 - 1 = x^2$$ (تتمتع الحدود مع بعضها)

نعود للمحاضرة الاسبقة :

ملاحظة :

اذا كانت الدالة معرفة على اي فترة غير محدودة ، $(-\infty, b]$ مثلاً

من اجل اية فترة جزئية $[\beta, b] \subset (-\infty, b]$ تكون

حسبما سبق الدالة ذ.ت.م بشرط ان تكون الدالة محدودة على هذه الفترة

كما ونضاف إلى هنا :

$$\overset{\beta}{\underset{-\infty}{V}}(f) = \sup_{\beta<b} \overset{b}{\underset{\beta}{V}}(f) = \sup_{\beta<b} |f(b) - f(\beta)|$$

$$= |f(b) - f(-\infty)| = f(-\infty) = \lim_{\beta \to -\infty} f(\beta)$$ اي :

وهكذا بالنسبة لباقي الفترات غير المحدودة . $[a, \infty)$ ، $(-\infty, \infty)$

دالة التغير :

يلزمنا هذا النوع من الدوال للكشف عن الدالة ذ.ت.م على فترة ما .

- لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة ذ.ت.م على $[a,b]$ عندئذٍ نسمي الدالة

المشكلة على النحو التالي :

$$v_f(t) = \begin{cases} \overset{t}{\underset{a}{V}}(f) & ; \ a<t \le b \\ 0 & ; \ t = a . \end{cases}$$

دالة التغير (ليس التغير) للدالة f وهي تمثل التغير الكلي للدالة f

على الفترة $[a,t]$.

مبرهنة : (خواص دالة التغير) :

اذا كانت f دالة ذ.ت.م على $[a,b]$ فان لدالة التغير

$v_f = v_f(t)$ (بالمتغير t)

الخواص التالية :

P_1) محدودة على $[a,b]$ اي : $|v_f(t)| \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$

لأن التغير الكلي محدود .

P_2) تزايدية على $[a,b]$ أي :

$$v_f(t_1) \le v_f(t_2) \quad ; \quad a \le t_1 \le t_2 \le b .$$

وعندها القفزة من اليمين = 0 أما النقطة $x=2$ انقطاع من اليسار فقط . ولنقوم الآن على حساب : x_2

$$\left[f(0+0) - f(0)\right] + \left[f(1+0) - f(1-0)\right]$$

$$+ \left[f(2) - f(2-0)\right] \overset{?}{\leq} f(2) - f(0) .$$

$$= 0 + 1 + 2 - 1 = 2 \leq 2 .$$

ملاحظة :

الدالة $[x]$ الدرجية تملك قفزة = 1 الصحيح عند كل عدد صحيح أي

$\in \mathbb{Z}$. يجب كتابة $\mathbb{Z}$ وليس Z

نتيجة:

الانقطاع من النوع الأول في x_0 $(a < x_0 < b)$ لنقط أي الفترة عدد محدود.

مبرهنة (1):

نقاط انقطاع الدوال المطردة المعرفة على $[a,b]$ هي من النوع الأول

مبرهنة (2):

مجموعة نقاط انقطاع الدالة المتزايدة f على $[a,b]$ هي مجموعة منتهية او معدودة (معدودة على الأكثر أي منتهية أو معدودة).

مثال:

$$y = [x] \quad ; \quad x \in [0, 2]$$

نقاط الانقطاع عددها = 2 على الأكثر.

$$f(1+0) - f(1-0) = 1 - 0 .$$

- واذا كانت النقاط $x_1, x_2, \ldots$ من الفترة $[a,b]$ من اجلها f غير مستمرة فإنه يكون:

$$[f(a+0) - f(a)] + \sum_{k=1}^{\infty} [f(x_k+0) - f(x_k-0)] + [f(b) - f(b-0)] \leq f(b) - f(a) \quad (*1)$$

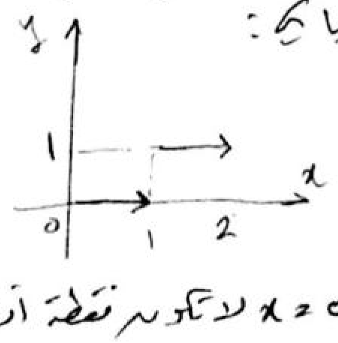
واذا كانت في حالة خاصة مجموعة نقاط انقطاع نوع أول هي منتهية $x_1, \ldots, x_n$ نقاط اختيارية من الفترة (a,b) يكون:

تمسي السابق فقط المجموع من $1 \to n$. (*2)

مثال:

لناخذ هنا $y = g(x) = [x]$ والمعرفة على الفترة $[0, 2]$

كما نعلم و متزايدة على هذه الفترة ومخطط البياني:



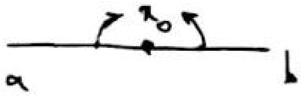
$$[x] = \begin{cases} 0 & ; \ 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; \ 1 \leq x < 2 \\ 2 & ; \ x = 2 \end{cases}$$

نلاحظ ان نقاط انقطاع داخل الفترة $(0, 2)$ هي النقطة الوحيدة $x = 1$ أما عند النقطة $x = 0$ لا تكون نقطة انقطاع

تابع للمحاضرة الأولى (الصفحات الفارغة):

النهايات:

عند دراسة الدالة نهتم بالنهاية من اليمين للدالة المعرفة على الفترة I (قد تكون غير محددة) في النقطة $a < x_0 < b$



ونرمز لها بالرمز $f(x_0+0)$ ونكتب:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0+0)$$

قيمة النهاية من اليمين.

أي من الدالة عند x_0 من اليمين.

كما ونهتم بالنهاية من اليسار في النقطة x_0 ونرمز لها: $f(x_0-0)$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0-0)$$

ونهتم عند النقطة b من اليسار وعند a بالنهاية من اليمين.

نقاط انقطاع من النوع الأول:

نقول إن الدالة f تعاني من انقطاع من النوع الأول في x_0 إذا وجدت النهايتان من اليمين واليسار واختلفتا. أي:

$$f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$$

أما القفزة عند النقطة x_0 حيث $a < x_0 < b$ من اليمين هي العدد $f(x_0+0) - f(x_0)$

وإن كان هذا العدد $= 0$ تصبح الدالة مستمرة عندها من اليمين عند x_0

والقفزة في النقطة x_0 حيث $a < x_0 < b$ ~~...~~ هي العدد:

~~...~~ $f(x_0+0) - f(x_0-0)$. (*)

مثال:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & ; \; x \neq 0 \\ 1 & ; \; x = 0 \end{cases}$$

إذا كان (*) $\neq f(x_0)$ تصبح x_0 نقطة انقطاع قابلة للإزالة هل g.

ومن أجل القفزة من اليسار في النقطة x_0 فهي العدد

$f(x_0+0) - f(x_0)$.

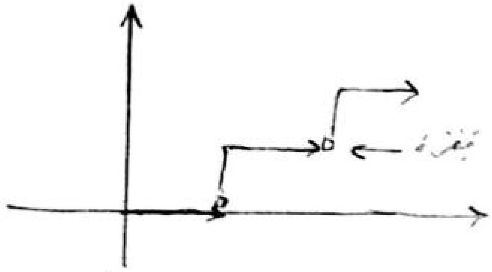
وعند حساب المجموع المباشر تستخدم كل الحدود ما عدا الموافقة لقيم الدالة f
$v(f;P)$
في النقاط c_k وعلى يسارها ويمينها ومنه نحصل على العلاقة المطلوبة.

بيّن دالة التغاير لأجل الدالة $f(x) = \sin x$ ، $x \in [0, 2\pi]$ ثم

ارسمها. (يكفي حساب 3 حدود).

3) الدالة f متقطعة بالانقطاع من النوع الأول:

سنفرض هنا أن الدالة تأخذ قيماً ثابتة مع نقاط انقطاع من نوع أول على $[a,b]$.



إذا كان للدالة $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

نقاط انقطاع من نوع أول هي:

$$c_1 , c_2 , \dots , c_m$$

عدد منته من نقاط انقطاع.

حيث: $a = c_0 < c_1 < \dots c_m < b = c_{m+1}$ وكانت تملك قيماً ثابتة على كل فترة جزئية (c_k , c_{k+1}) $(k = 0,1,\dots,m)$

ملاحظة: حيث: $a = c_0 , \ b = c_{m+1}$

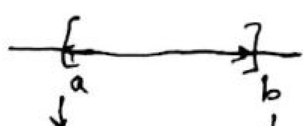
فعندئذ تغاير f على $[a,b]$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

مجموع القفزات بالقيمة المطلقة أي:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \Big| \underbrace{f(a+0)}_{\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f} - f(a) \Big| + \sum_{k=1}^{m} \Big\{ \Big| f(c_k) - \underbrace{f(c_k - 0)}_{\lim\limits_{x \xrightarrow{<} c_k} f} \Big|$$

$$+ \Big| f(c_k + 0) - f(c_k) \Big| \Big\} + \Big| f(b) - f(b-0) \Big| \quad (4)$$



$f(a+0) - f(a)$ $\qquad$ $f(b) - f(b-0)$.

مثال:

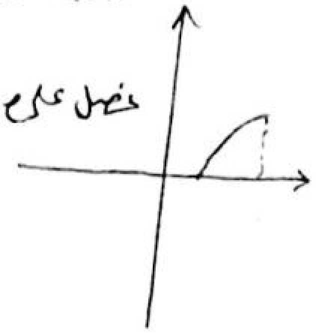
$$g = \begin{cases} x^2 & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ 5 & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

مثال:

الدالة $f(x) = \ln x$ على $[1, e]$ ذات تغير محدود وتغيرها الكلي:

لأنها تزايدية تماماً:

$$\overset{e}{\underset{1}{V}}(\ln x) =$$



نحصل على e من مجموع متسلسلة - ... متتالية

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!}$$

نضع مكان $x=1$ نحصل على e

$$\overset{e}{\underset{1}{V}}(\ln x) = \ln e - \ln(1) = 1$$

حيث الدالة تزايدية تماماً على $]0, \infty[$ وبالتالي على

$$[1, e] \subset]0, \infty[$$

مثال:

الدالة $g(x) = [x]$ تزايدية على $\mathbb{R}$ في أي فترة جزئية مثل $[0, 2]$

ذات تغير محدود على التغير الكلي:

$$\overset{2}{\underset{0}{V}}(g) = [2] - [0] = 2$$

2) المطردة جزئياً:

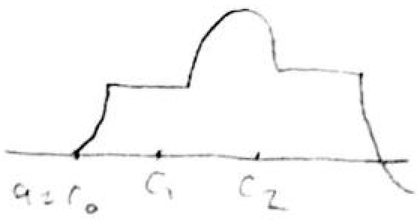
هذا المعيار أعم من سابقه.

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ وأمكننا تجزئة الفترة $[a,b]$ إلى عدد منته من الفترات الجزئية $[c_k, c_{k+1}]$ حيث $k = 0, 1, \dots, m$

حيث تكون f مطردة على كل منها.

عندئذ تكون هذه الدالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

ويكون:



$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sum_{k=0}^{m} \overset{c_{k+1}}{\underset{c_k}{V}}(f).$$

$$= \overset{c_1}{\underset{a=c_0}{V}}(f) + \overset{c_2}{\underset{c_1}{V}}(f) + \dots + \overset{b=const}{\underset{c_m}{V}}(f) \quad (3)$$

مثال توضيحي:

دالة تزايدية ⟸ $\Delta f(x) \geq 0$

الرابعة: عبد الملك الاخطر — الخميس 2015/11/5

مثال:

دالة ديرخليه نلاحظ ان $|f| = 1$ وهي ذ.ت.م إلا انه f ليست ذ.ت.م. بالتالي

f ذ.ت.م ⟸ |f| ذ.ت.م.

$\not\Rightarrow$

ملاحظة:

من نتائج الملاحظة السابقة دالة ديرخليه تغيرها الكلي.

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(|f|) = 0$$

معايير اختبارات الدالة ذ.ت.م:

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ كما رأينا تعريف الدالة ذات تغير محدود أيضاً ولكنه ليس سهلاً لذا سنستخدم المعايير التالية لتحديد متى تكون الدالة ذ.ت.م على فترة ما.

(١) الدالة المطردة:

كل دالة مطردة تزايدية أو تناقصية (لا تناقصية أو لا تزايدية) على $[a,b]$ هي ذ.ت.م عليها ويكون تغيرها الكلي: $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(b) - f(a)|$

<u>الاثبات:</u>

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ولنفرض أنها تزايدية ولتكن

$$P_{[a,b]} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

تجزئة اختيارية لـ $[a,b]$ عندها يكون:

$$V(f;P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$\overset{\text{تزايدية}}{=} \sum_{k=1}^{n} \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}$$

$$= f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})$$

$$= f(x_n) - f(x_0) = \text{عدد محدود}$$

ومنه فإن الدالة f ذ.ت.م على $[a,b]$ وتغيرها الكلي:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = f(b) - f(a) \quad ①$$

في حال كانت مطردة تناقصية على $[a,b]$:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \leq \underbrace{f(a) - f(b)}_{\geq 0} \quad ②$$